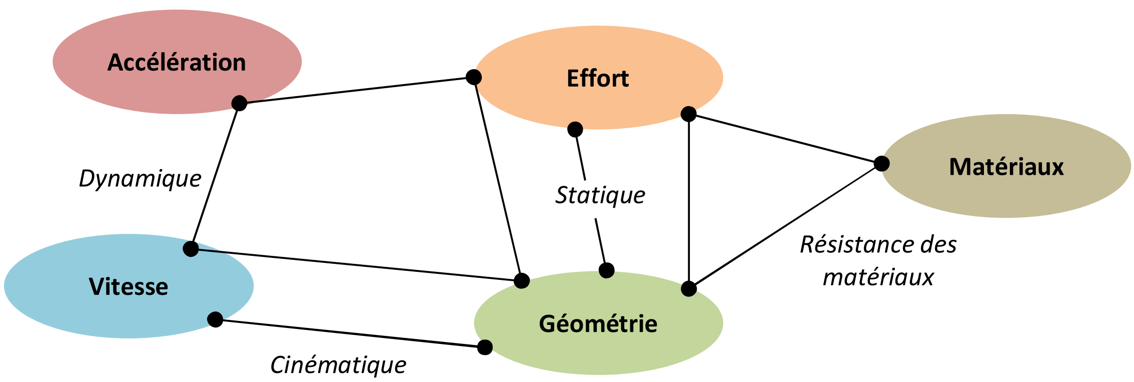
Points du programme	▪ **S2-2 - Comportement d'un mécanisme et/ou d'une pièce :** Équilibre des solides : modélisation des liaisons, des actions mécaniques, principe fondamental de la statique, résolution d'un problème de statique.	Séquence 1

Objectifs	Pré requis
• Ecrire les coordonnées d'un vecteur force. • Déterminer le couple engendré par une force. • Ecrire une action mécanique sous forme de torseur.	• Mathématiques : Notion de vecteur.

Le comportement mécanique d'une structure est conditionné par une géométrie, un ou des matériaux, des mouvements, des efforts appliqués et des déformations qui en découlent. Prédire et maîtriser le comportement mécanique d'un système, c'est maîtriser la relation entre tous ces éléments.

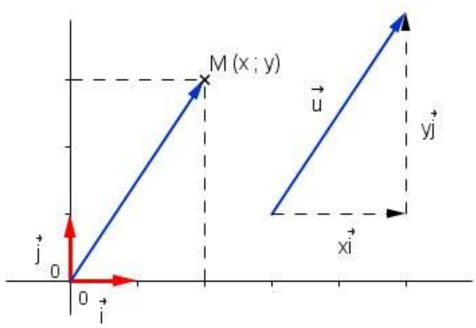


Au programme de sti2d ?

- La statique graphique a été abordée en première I2D.
- En terminale ITEC, nous étudierons des problèmes de statique analytique, la résistance des matériaux et la cinématique graphique,
- La cinématique analytique et la dynamique sont au programme des études supérieures.

1 - Rappels de mathématiques

1.1 - Coordonnées d'un vecteur dans un repère



Le plan étant muni d'un repère$(O,\vec{i},\vec{j})$, soit $\vec{u}$ un vecteur donné et M le point du plan tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Si on note (x ; y) les coordonnées de M alors $\overrightarrow{OM}=\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

Propriétés :

Soient les coordonnées des points O (x_O, y_O) et M (x_M, y_M). Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M - x_O \\ y_M - y_O \end{pmatrix}$.

1.2 - Norme

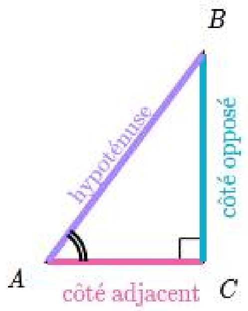
La norme du vecteur $\vec{u}$ se calcule par la relation de Pythagore :

$\|\|\vec{u}\|\|$=

1.3 - Relation trigonométrique

Par définition, le **sinus**, le **cosinus** et la **tangente** de l'angle aigu de sommet A du triangle rectangle ABC sont :

$\cos(A) =$
$\sin(A) =$
$\tan(A) =$



1.4 - Projection d'un vecteur

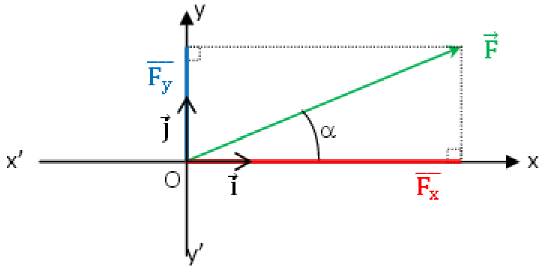
Soit une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'axe horizontal dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La coordonnée Fx correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

soit

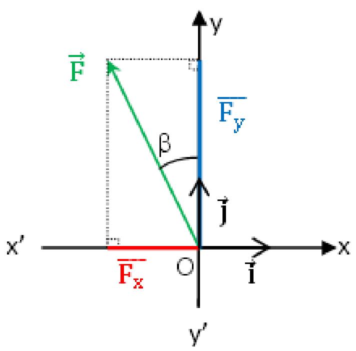
La coordonnée Fy correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

soit



Cas d'un vecteur ayant une coordonnée négative.

Soit une force $\vec{F}$ inclinée d'un angle β par rapport à l'axe vertical dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



La coordonnée Fx correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

soit

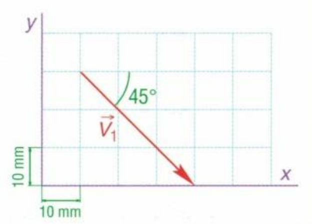
La coordonnée Fy correspond à la projection du vecteur force $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

soit

QCM

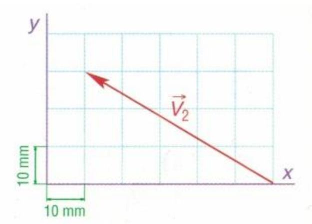
Quelles sont les bonnes affirmations parmi celles proposées ?
Justifier vos réponses.

1 - Des trois projections de $\overrightarrow{V_1}$ sur x et y lesquelles sont bonnes ?



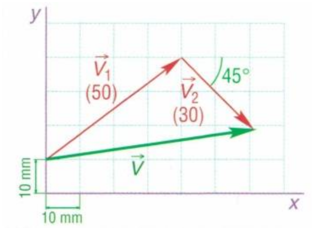
- ☐ $V_{1x} = -30$; $V_{1y} = 30$; $V_1 = 42,42$
- ☐ $V_{1x} = 30$; $V_{1y} = -30$; $V_1 = -42,42$
- ☐ $V_{1x} = 30$; $V_{1y} = -30$; $V_1 = 42,42$

2 - Des trois projections de $\overrightarrow{V_2}$ sur x et y lesquelles sont bonnes ?



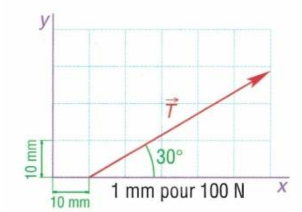
- ☐ $V_{2x} = 50$; $V_{2y} = 30$; $V_2 = -80$
- ☐ $V_{2x} = -50$; $V_{2y} = 30$; $V_2 = 58,31$
- ☐ $V_{2x} = -50$; $V_{2y} = 30$; $V_2 = 80$

3 - Si $\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$ avec $V_1 = 50$ et $V_2 = 30$, quelles sont les bonnes projections ?



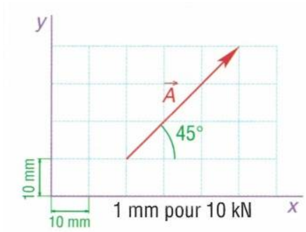
- ☐ $V_x = -61,21$; $V_y = -8,79$; $V = -60,58$
- ☐ $V_x = 61,21$; $V_y = 8,79$; $V = 61,84$
- ☐ $V_x = 61,21$; $V_y = 8,79$; $V = 60,58$

4 - La force $\vec{T}$ est dessinée à l'échelle 1 mm pour 100 N, son intensité T et ses coordonnées T_x et T_y sont :



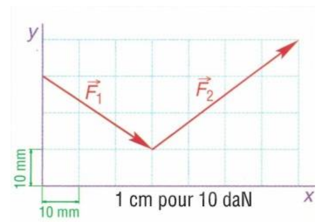
- ☐ T = 577,35 N ; T_x = 500 N ; T_y = 288,67 N
- ☐ T = 5 773,5 N ; T_x = 5 000 N ; T_y = 2 886,75 N
- ☐ T = 5 773,5 N ; T_x = 2 886,75 N ; T_y = 5 000 N

5 - La force $\vec{F}$ est dessinée à l'échelle 1 mm pour 10 kN, son intensité A et ses coordonnées A_x et A_y sont :



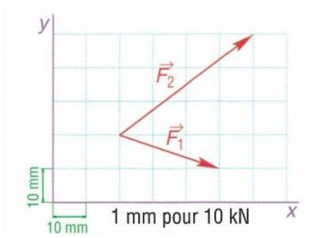
- ☐ A = 42,43 kN ; $A_x = A_y$ = 30 kN
- ☐ A = 424,3 kN ; $A_x = A_y$ = 300 kN
- ☐ A = 4 243 kN ; $A_x = A_y$ = 3 000 kN

6 - Si $\vec{F} = -(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2})$ quelles sont les projections correctes de $\vec{F}$:



- ☐ F_x = -700 N ; F_y = 100 N
- ☐ F_x = 700 N ; F_y = 100 N
- ☐ F_x = -700 N ; F_y = -100 N

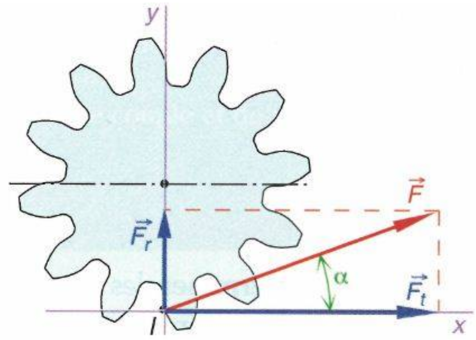
7 - Soit $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$ quelles sont les projections correctes de $\vec{F}$:



- ☐ F_x = 700 kN ; F_y = 200 kN ; F = 728 kN
- ☐ F_x = 700 kN ; F_y = -200 kN ; F = 728 kN
- ☐ F_x = -700 kN ; F_y = -200 kN ; F = 728 kN

Applications

Exercice 1

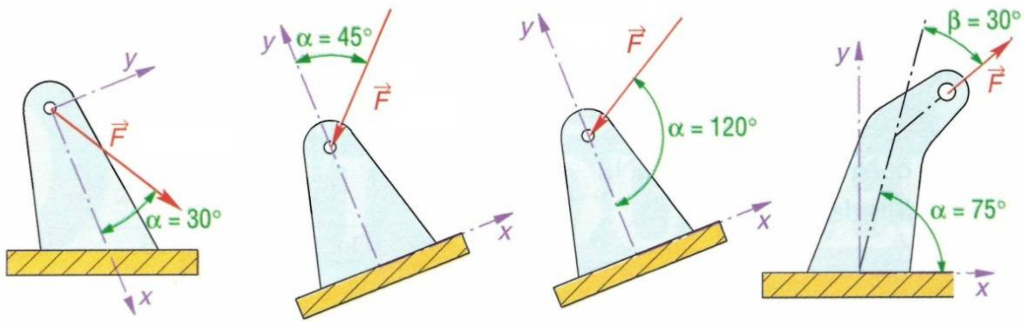


Question 1.1 - Déterminer les composantes radiale Fr et tangentielle Ft de l'action $\vec{F}$ exercée en I sur une dent de la roue si F = 1000 N et l'angle de pression α = 20°.

Exercice 2

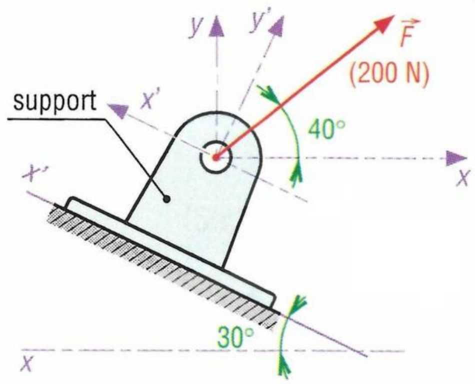
Question 2.1- Exprimer littéralement, pour chacun des cas, les coordonnées du vecteur $\vec{F}$ dans repère R en fonction de l'intensité F et des angles α ou β donnés.

Question 2.2- Faire l'application numérique pour une intensité de 1000 N.

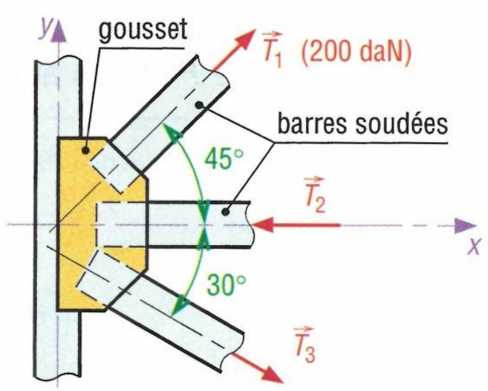


Exercice 3

Question 3.1 - Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère $R(\vec{x}, \vec{y})$ puis $R'(\vec{x}', \vec{y}')$.



Exercice 4



Question 4.1 - Déterminer les coordonnées T_{1x} et T_{1y} de la tension T_1 de la barre (1).

Question 4.2 - Déterminer T_3 et T_{3x} si T_{3y} = 100 daN.

Question 4.3 - Déterminer T_2 si ($T_{1x} + T_{2x} + T_{3x} = 0$).

2 - Couple et moment

2.1 - Notion de couple

On appelle actions mécaniques toute cause susceptible de maintenir un corps en équilibre, créer ou modifier un mouvement de ce corps et déformer un corps.

La force de l'action mécanique peut créer un mouvement de rotation autour d'un point ou d'un axe. **Le moment d'une force** par rapport à ce point est une grandeur physique vectorielle traduisant l'aptitude d'une force à faire tourner un système mécanique autour de ce point. Il s'exprime en N.m (newton-mètre). Lorsque la **rotation** se fait **autour d'un axe**, le moment est appelé **couple**.

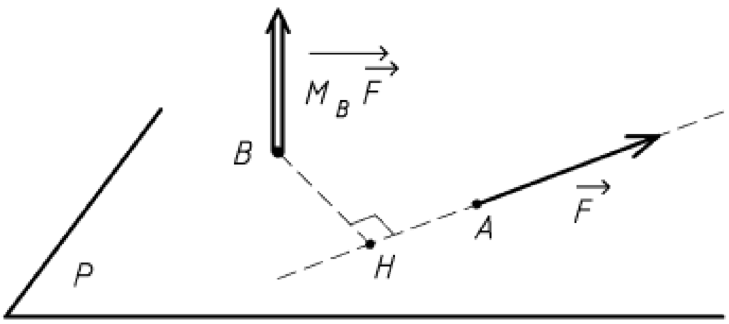
Une action mécanique se modélise alors par deux vecteurs :

- la _______________ qui engendre un mouvement de ________________ et s'exprime en _________________,
- le ______________ qui engendre un mouvement de ______________ et s'exprime en _______________________.

Un couple se représente par un vecteur :

-
-
-
-

Pour distinguer une force d'un couple, on dessine ce dernier avec une double flèche.

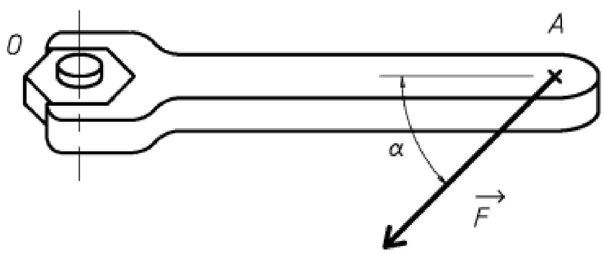


2.2 - Calcul du couple

Un couple est engendré par une force ou un ensemble de forces. Prenons l'exemple d'un écrou serré avec la clé correspondante. L'écrou, d'axe vertical, est placé au point O. La force $\vec{F}$, horizontale, est exercée à l'extrémité A de la clé. Supposons que cette force soit inclinée d'un angle α par rapport à la clé (α varie de 0° à 180°).

Le couple de serrage est d'autant plus élevé que :

- La distance OA est grande.
- La force $\vec{F}$ est importante.
- L'angle α se rapproche de 90° (le couple de serrage est nul pour α = 0° et pour α = 180°).



Si les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}$ sont dans le même plan, la norme du moment par rapport au point B de la force $\vec{F}$ se calcule avec la relation :

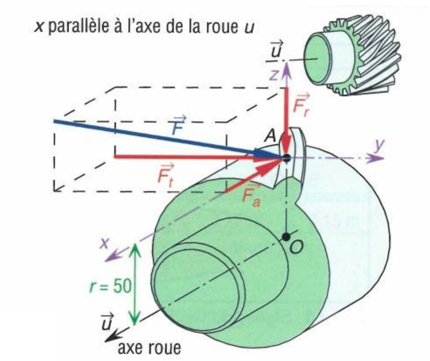
Remarque :

- Si α = 90°, alors sin α = 1. La formule est simplifiée, le couple est alors le produit de la force par la distance appelée aussi « **bras de levier** ».
- Si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique, le couple est positif.
- Si la rotation s'effectue dans le sens horaire, le couple est négatif.

2.3 - Coordonnées d'un moment

Si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\ (x_{OA};\ y_{OA};\ z_{OA})$ et $\vec{\mathrm{F}}\ (x_F;\ y_F;\ z_F)$ ne sont pas dans le même plan, les coordonnées du moment au point O de la force $\vec{\mathrm{F}}$ se calcule avec le produit vectoriel. Les composantes du produit vectoriel sont définies par la différence du produit en croix :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{\mathrm{F}} = {}_R\left|\begin{matrix} x_{OA} \\ y_{OA} \\ z_{OA} \end{matrix}\right. \wedge {}_R\left|\begin{matrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{matrix}\right. = {}_R\left|\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right.$$



Exemple : Soit une force $\vec{\mathrm{F}}$ s'exerçant au point A d'une roue dentée à dentures hélicoïdales, déterminons la moment de cette force par rapport à l'axe $\vec{\mathrm{u}}$ de la roue.

- $\vec{\mathrm{F}} = \overrightarrow{\mathrm{F}_a} + \overrightarrow{\mathrm{F}_t} + \overrightarrow{\mathrm{F}_r}$
- $\vec{\mathrm{F}} = -2\,000.\vec{\mathrm{x}} + 4\,000.\vec{\mathrm{y}} - 1\,000.\vec{\mathrm{z}}$ en (N)
- $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0{,}05.\vec{\mathrm{z}}$ en (m)

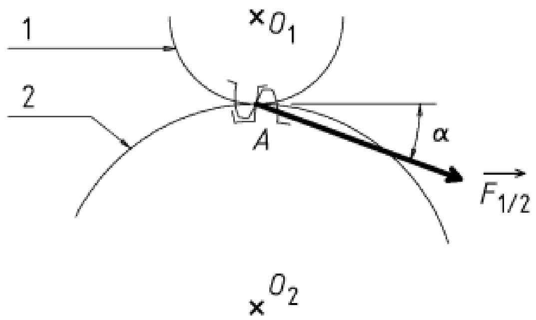
$$\overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{O}\vec{\mathrm{F}}}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge \vec{\mathrm{F}} = {}_R\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}05 \end{matrix}\right. \wedge {}_R\left|\begin{matrix} -\,2000 \\ 4\,000 \\ -1\,000 \end{matrix}\right. = {}_R\left|\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right.$$

Remarque :

- Le moment étant toujours perpendiculaire au plan *P,* si la force est dans le plan x,y, le vecteur moment sera suivant l'axe z.

Applications

Exercice 5 - Couples dans un engrenage



Un engrenage est constitué d'un pignon 1 (Ø=50 mm), lié à l'arbre d'un moteur, de centre O_1 et d'une roue denté 2 (Ø=124 mm), liée à l'arbre d'un récepteur, de centre O_2.

L'engrenage étant normalisé, la force $\vec{F}_{1/2}$ de 20 N exercée par une dent du pignon 1 sur une dent de la roue dentée 2 au point A, est inclinée de l'angle α=20° (α est l'angle de pression).

Question 5.1 - Déterminer le couple au point O_1 de la force $\vec{F}_{1/2}$.

Question 5.2 - Déterminer le couple au point O_2 de la force $\vec{F}_{1/2}$.

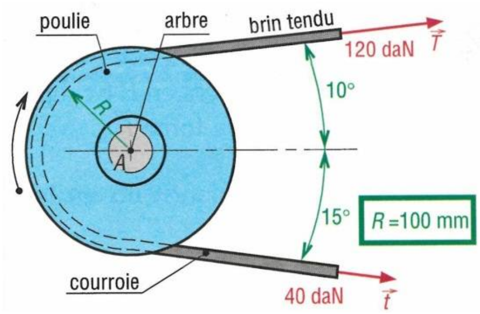
Exercice 6 - Poulie courroie

Le rayon R d'enroulement de la courroie sur la poulie est de 100 mm, $\vec{t}$ et $\vec{T}$ schématisent les efforts de tension.

Question 6.1 - Calculer la norme du moment au point A de la tension $\vec{T}$ et écrire ses coordonnées.

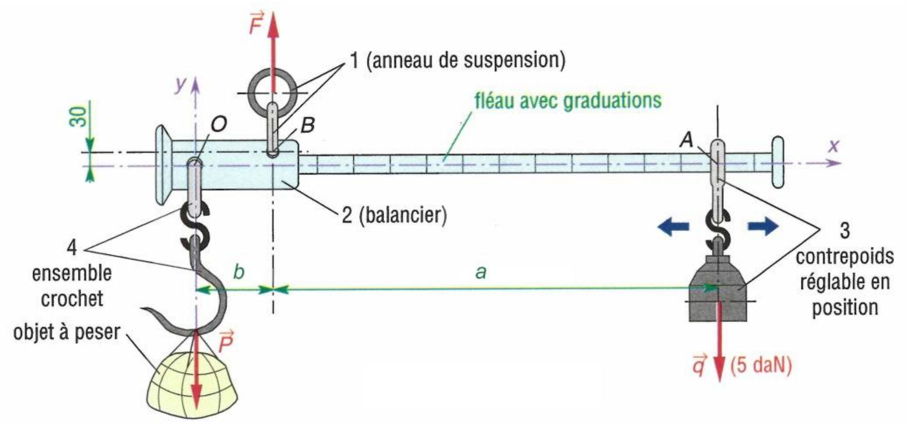
Question 6.2 - Calculer la norme du moment au point A de la tension $\vec{t}$ et écrire ses coordonnées.

Question 6.3 - En déduire le couple disponible sur l'arbre de transmission.



Exercice 7 - Balance romaine

Une balance romaine se compose d'un balancier (2) articulé en B avec un anneau de suspension (1) et d'un contrepoids d'équilibrage (3) dont la position est réglable sur le balancier. La charge à peser (4) est accrochée en O. La pesée est effectuée en déplaçant le contrepoids d'équilibrage (3).



Question 7.1 - Au moment de la pesée, lorsque le balancier est à l'équilibre horizontalement, $\overrightarrow{M_{B\vec{P}}} + \overrightarrow{M_{B\vec{q}}} = \vec{0}$. Exprimer littéralement la relation d'équilibrage entre P et les autres paramètres du problème.

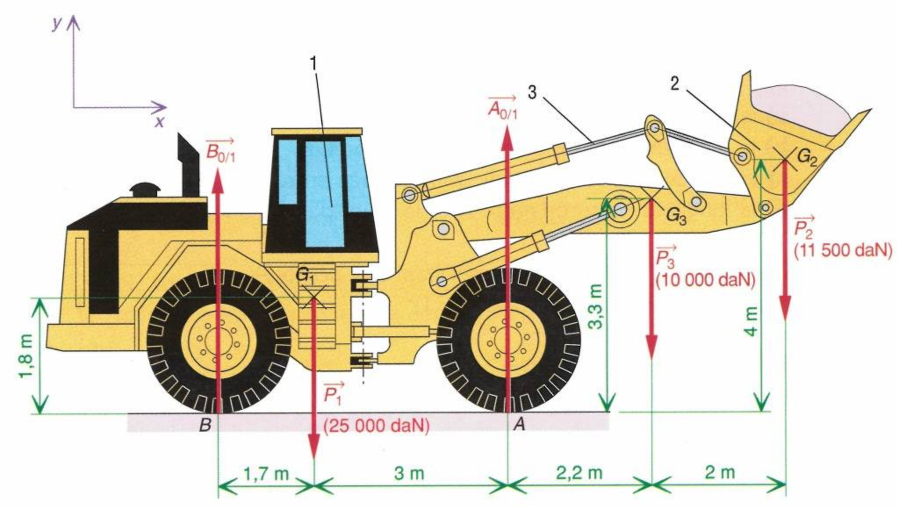
Question 7.2 - Calculer la masse de l'objet à peser si *a* = 700 mm et *b* = 100 mm.

Exercice 8 - Chargeur sur pneus.

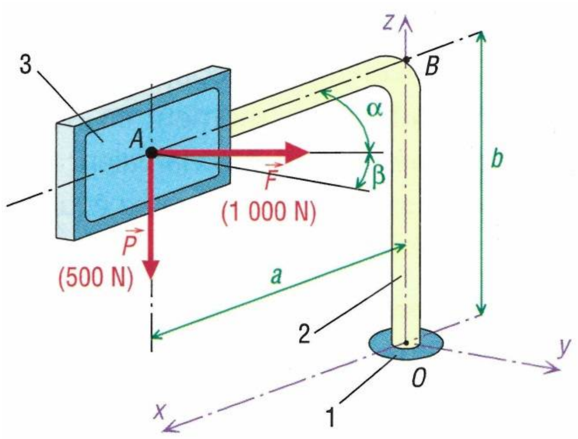
Le chargeur sur pneus se compose d'un châssis 1 (poids $\overrightarrow{P_1}$ de 25 000 daN en G_1), d'un godet 2 rempli de matériaux (poids $\overrightarrow{P_2}$ de 11 500 daN en G_2) et d'un ensemble flèche 3 articulée avec des vérins (poids $\overrightarrow{P_3}$ de 10 000 daN en G_3). L'ensemble est supposé en équilibre à l'arrêt.

Question 8.1 - Déterminer le moment résultant en A des trois poids $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{P_3}$ et vérifier qu'il n'y a pas de basculement vers l'avant.

Question 8.2 - Pour quelles valeurs de $\overrightarrow{P_2}$ y a-t-il risque de basculement ?



Exercice 9 - Ecran d'affichage



Un panneau d'informations à écran (3) d'un poids $\vec{P}$ est fixé à un poteau (2) encastré dans le sol (1). La force $\vec{F}$ contenue dans le plan parallèle à $(O,\vec{x},\vec{y})$, schématise la résultante des actions du vent sur le panneau.

Données

- $\alpha = 60°$ et $\beta = 30°$.
- a = 6 m et b = 8m.

Question 9.1 - Ecrire les coordonnées des forces $\vec{F}$ et $\vec{P}$ dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Question 9.2 - Calculer les moments de ces forces au point O en utilisant le produit vectoriel.

3 - Torseur d'action mécanique

Une action mécanique possède donc deux composantes : la force et le moment de cette force. Le torseur d'une action mécanique est une forme d'écriture, de présentation, elle peut être sous forme vectorielle ou sous forme analytique. Ses coordonnées varient suivant le point de réduction du torseur :

X,Y,Z sont les coordonnées de la force $\vec{F}$ dans le repère R et L,M,N sont les coordonnées du moment $\overrightarrow{M_{B\,\vec{F}}}$ dans ce même repère R.

Remarque :

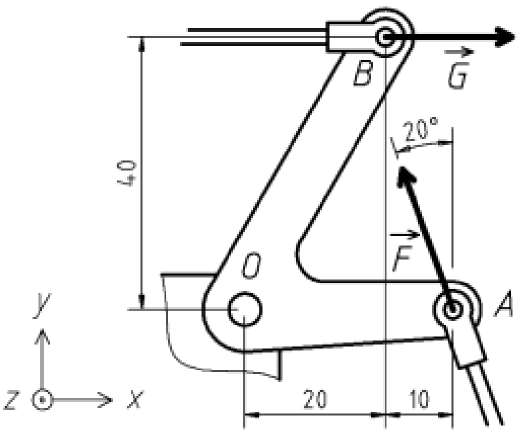
- Si le point de réduction du torseur change, les coordonnées de la force ne varient pas, seul le moment est à recalculer.
- Le moment au point d'application de la force est toujours nul.

Applications

Exercice 10 - Agrafeuse automatique

Dans une agrafeuse automatique, un levier tourne autour de l'axe situé au niveau du point O. Sur ce levier, deux tiges exercent deux forces.

- La force $\vec{F}$ de support incliné de 20° et de norme 22,7 N.
- La force $\vec{G}$ de support horizontal et de norme 16 N.



Question 10.1 - Ecrire les coordonnées des forces $\vec{F}$ et $\vec{G}$.

Question 10.2 - Déterminer le moment par rapport au point O de la force $\vec{F}$, noté $\overrightarrow{M_{O\,\vec{F}}}$.

Question 10.3 - Déterminer le moment par rapport au point O de la force $\vec{G}$, noté $\overrightarrow{M_{O\,\vec{G}}}$.

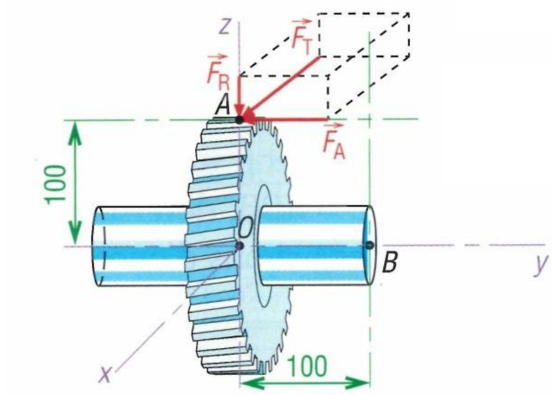
Question 10.4 - Modéliser la force $\vec{F}$ par le torseur $\{T_{\vec{F}}\}$ au point A.

Question 10.5 - Modéliser la force $\vec{G}$ par le torseur $\{T_{\vec{G}}\}$ au point B.

Question 10.6 - Ecrire les torseurs $\{T_{\vec{F}}\}$ et $\{T_{\vec{G}}\}$ au point O.

Exercice 11 - Roue à denture hélicoïdale.

Une roue dentée à denture hélicoïdale support au point A, exercée par une autre roue dentée, une action dont les composantes sont $\overrightarrow{F_A}$ (200 daN charge axiale), $\overrightarrow{F_R}$ (100 daN charge radiale) et $\overrightarrow{F_T}$ (400 daN charge tangentielle).

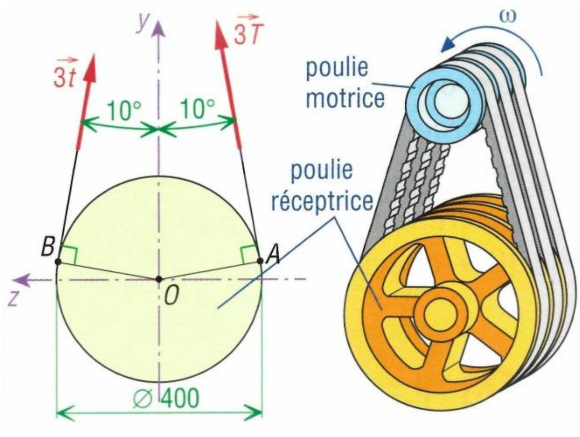


Question 11.1 - Ecrire le torseur correspondant à ces actions au point A.

Question 11.2 - Ecrire ce torseur au point O puis au point B.

Exercice 12 - Transmission par courroie

Une transmission se compose d'une poulie entraînée par trois courroies trapézoïdales. Le plan (O, $\vec{y}$, $\vec{z}$) est le plan de symétrie de l'ensemble et (O, $\vec{x}$) l'axe de rotation. Le diamètre d'enroulement des courroies est de 400 mm. Chaque courroie supporte les tensions $\vec{T}$ (1500 N, brin tendu) et $\vec{t}$ (300 N, brin mou).

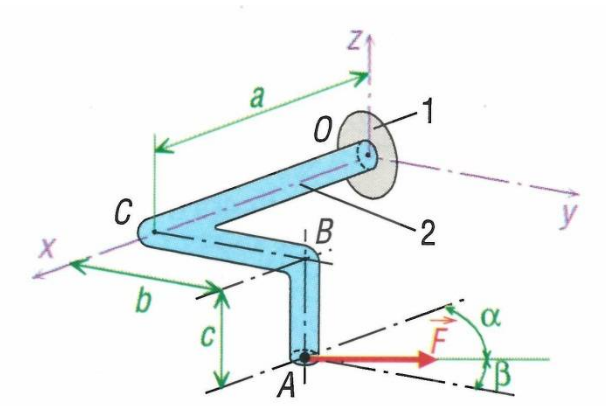


Question 12.1 - Ecrire les trois tensions $\vec{T}$ sous forme d'un même torseur agissant en A. Même chose pour les trois tensions $\vec{t}$ en B.

Question 12.2 - Ecrire les deux torseurs précédents au centre O de la liaison.

Question 12.3 - En déduire le torseur résultant en ce point.

Exercice 13



Une barre coudée 2 est encastrée en O dans une paroi fixe 1. La force $\vec{F}$, 1 000 N, en A, parallèle à (O, x, y) a une direction définie par α = 60° et β = 30°.

Données : a = 1 000 mm, b = 600 et c = 400.

Question 13.1 - Ecrire le torseur de $\vec{F}$ au point A.

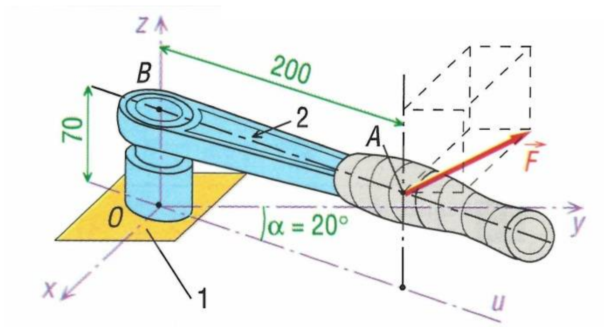
Question 13.2 - Ecrire le torseur de $\vec{F}$ au point O.

Exercice 14

La force $\vec{F}$ en A schématise l'action de la main de l'opérateur sur la clé à cliquet (2) au moment du desserrage de la vis 3. Le manche BA est dans une direction horizontale *u* à 20° de l'axe y.

Données :

- $\|\vec{F}\| = 170$ N.
- $\vec{F}$ est perpendiculaire à la direction *u*.



Question 14.1 - Quelles sont les coordonnées de $\vec{F}$ dans le repère (O, x, y, z) ?

Question 14.2 - Ecrire le torseur de $\vec{F}$ au point A.

Question 14.3 - Ecrire le torseur de $\vec{F}$ au point O.